

УДК- 519.711.3

*Ландин Г. В.*

*студент*

*2 курс, Инженерный факультет*

*ИСТид (филиал) ФГАОУ ВО СКФУ*

*Россия, г. Пятигорск*

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОМЕРНОГО  
ПРОСТРАНСТВЕННОГО СКАНЕРА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ  
СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ**

*Аннотация:* В данной статье рассматривается математический аппарат построения пространственного сканера для распределенной системы обработки информации. Пространственные сканеры позволяют обнаруживать пространственно-модулированные сигналы в распределенном входном воздействии. Они также применяются для настройки параметров пространственных фильтров, которые необходимы для выделения из распределенного входного воздействия заданных пространственных мод (магистралей). Пространственные сканеры и пространственные фильтры в совокупности образуют блок обработки распределенного сигнала.

*Ключевые слова:* математическая модель, входное воздействие, граничные условия, коэффициент передачи, система с распределенными параметрами, распределенный сигнал, пространственный сканер.

*Landin G. V.*

*student*

*2nd year, faculty of Engineering*

*Istid (branch) FEDERAL STATE SKFU*

## MATHEMATICAL MODEL OF A ONE-DIMENSIONAL SPATIAL SCANNER FOR A DISTRIBUTED INFORMATION PROCESSING SYSTEM

**Abstract:** *this article discusses the mathematical apparatus for constructing a spatial scanner for a distributed information processing system. Spatial scanners allow detecting spatially modulated signals in a distributed input field. They are also used to configure spatial filter parameters that are necessary for selecting the specified spatial modes (highways) from the distributed input effect. Spatial scanners and spatial filters together form a distributed signal processing unit.*

**Keywords:** *mathematical model, input impact, boundary conditions, transmission coefficient, system with distributed parameters, distributed signal, spatial scanner.*

Положим, что имеется распределенный объект, схема которого указана на рис. 1.

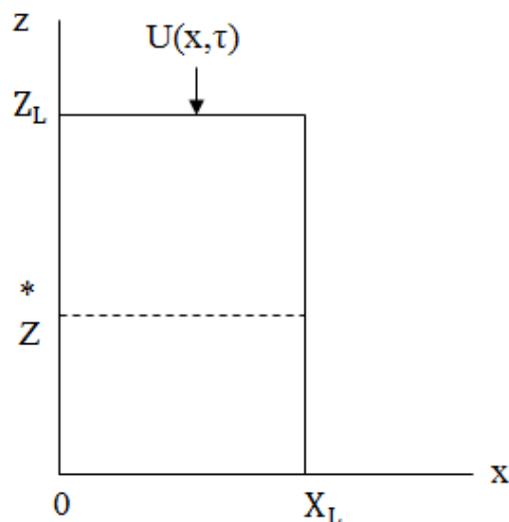


Рис. 1. Схема распределенного объекта

Математическую модель представленного выше объекта можно описать следующим уравнением:

$$A \cdot \frac{\partial^2 T(x, z, \tau)}{\partial x^2} + T(x, z, \tau) + \frac{\partial^2 T(x, z, \tau)}{\partial z^2} = 0,$$

$$(0 < z < Z_L, 0 < x < X_L)$$

где  $A$  - заданное число,  $x, z$  - пространственные координаты,  $\tau$  - время,  $T(x, z, \tau)$  - фазовая переменная,  $X_L, Z_L$  - заданные величины.

Граничные условия, помимо входного воздействия, будем считать нулевыми. Они будут представлены в виде следующих соотношений:

$$T(x = 0, z, \tau) = T(x = X_L, z, \tau) = 0,$$

$$\frac{\partial T(x, z = Z_L, \tau)}{\partial z} = U(x, \tau),$$

$$\frac{\partial T(x, z = 0, \tau)}{\partial z} = 0$$

Положим, что входное воздействие представлено в виде ряда Фурье по пространственной координате, которое, с учётом граничного условия  $T(x = 0, z, \tau) = T(x = X_L, z, \tau) = 0$ , записывается в виде:

$$U(x, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{C}_i(\tau) \cdot \sin(\Psi_i \cdot x),$$

$$\Psi_i = \frac{\pi \cdot i}{X_L},$$

где  $\bar{C}_i(\tau)$  - заданные функции (т. е. функции, несущие информацию о полезном сигнале).

Требуется определить  $T(x, z = \dot{Z}, \tau)$ , где  $\dot{Z}$  - заданное число ( $0 < \dot{Z} < Z_L$ ).

Реакция объекта на каждую моду входного воздействия следует определять в виде:

$$T_i(x, z, \tau) = H_i(z, \tau) \cdot \sin(\Psi_i \cdot x),$$

где  $H_i(z, \tau)$  - определяемые функции.

Подставляя выражение  $T_i(x, z, \tau) = H_i(z, \tau) \cdot \sin(\Psi_i \cdot x)$  в уравнение математической модели рассматриваемого распределенного объекта и преобразуя, получим следующее:

$$- A \cdot \Psi_i^2 \cdot H_i(z, \tau) + H_i(z, \tau) + \frac{\partial^2 H_i(z, \tau)}{\partial z^2} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 H_i(z, \tau)}{\partial z^2} + (1 - A \cdot \Psi_i^2) \cdot H_i(z, \tau) = 0$$

Функцию  $H_i(z, \tau)$  следует искать в виде:

$$H_i(z, \tau) = B_{1,i} \cdot e^{\beta_i \cdot z} + B_{2,i} \cdot e^{-\beta_i \cdot z},$$

где  $\beta_i = (A \cdot \Psi_i^2 - 1)^{1/2}$ ,  $B_{1,i}$ ,  $B_{2,i}$  - функции, определяемые из граничных условий.

Подставив  $H_i(z, \tau) = B_{1,i} \cdot e^{\beta_i \cdot z} + B_{2,i} \cdot e^{-\beta_i \cdot z}$  в формулу реакции объекта на моды входного воздействия  $T_i(x, z, \tau) = H_i(z, \tau) \cdot \sin(\Psi_i \cdot x)$  и далее в  $\frac{\partial T(x, z=0, \tau)}{\partial z} = 0$ , придём к следующему соотношению:

$$B_{1,i} \cdot \beta_i - B_{2,i} \cdot \beta_i = 0, \text{ или } B_{1,i} = B_{2,i}.$$

Подставив  $H_i(z, \tau) = B_{1,i} \cdot e^{\beta_i \cdot z} + B_{2,i} \cdot e^{-\beta_i \cdot z}$  в формулу реакции объекта на моды входного воздействия  $T_i(x, z, \tau) = H_i(z, \tau) \cdot \sin(\Psi_i \cdot x)$  и далее в  $\frac{\partial T(x, z=Z_L, \tau)}{\partial z} = U(x, \tau) = 0$ , получим:

$$B_{1,i} \cdot \beta_i \cdot (e^{\beta_i \cdot Z_L} - e^{-\beta_i \cdot Z_L}) = \bar{C}_1(\tau)$$

Значение  $B_{1,i}$  определяется из следующего соотношения:

$$B_{1,i} = \frac{\bar{C}_1(\tau)}{\beta_i (e^{\beta_i \cdot Z_L} - e^{-\beta_i \cdot Z_L})}$$

Реакцию объекта на каждую моду входного воздействия можно записать в виде:

$$T_i(x, \dot{Z}, \tau) = \frac{\bar{C}_1(\tau) \cdot (e^{\beta_i \cdot \dot{Z}} - e^{-\beta_i \cdot \dot{Z}})}{\beta_i (e^{\beta_i \cdot Z_L} - e^{-\beta_i \cdot Z_L})} \cdot \sin(\Psi_i \cdot x)$$

Функция выхода рассматриваемого объекта определяется из следующего соотношения:

$$T_i(x, \dot{Z}, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_1(\tau) \cdot (e^{\beta_i \cdot \dot{Z}} - e^{-\beta_i \cdot \dot{Z}})}{\beta_i (e^{\beta_i \cdot Z_L} - e^{-\beta_i \cdot Z_L})} \cdot \sin(\Psi_i \cdot x)$$

Коэффициент передачи ( $K_i = T_i(x, \dot{Z}, \tau) / (\bar{C}_1(\tau) \cdot \sin(\Psi_i \cdot x))$ ) по каждой пространственной моде определяется из следующего соотношения:

$$K_i = \frac{e^{\beta_i \cdot z} - e^{-\beta_i \cdot z}}{\beta_i \cdot (e^{\beta_i \cdot z_L} - e^{-\beta_i \cdot z_L})}, i = \overline{1, \infty},$$

где  $\beta_i = (A \cdot \Psi_i^2 - 1)^{1/2}$ .

Положим, что  $A = 1/G$ , где  $G$  является непрерывной функцией, пробегающей все значения  $\Psi^2$ ,  $i = \overline{1, \infty}$  (эту функцию называют обобщенной координатой).

Для значений  $G \rightarrow \Psi^2$ , ( $i = \overline{1, \infty}$ )  $\beta_i \rightarrow 0$ , а значение  $\text{abs}(K_i) \rightarrow \infty$ .

Уравнения  $A \cdot \frac{\partial^2 T(x, z, \tau)}{\partial x^2} + T(x, z, \tau) + \frac{\partial^2 T(x, z, \tau)}{\partial z^2} = 0$ , ( $0 < z < z_L$ ,  $0 < x < X_L$ ),  $T(x = 0, z, \tau) = T(x = X_L, z, \tau) = 0$ ,  $\frac{\partial T(x, z = z_L, \tau)}{\partial z} = U(x, \tau)$ ,  $\frac{\partial T(x, z = 0, \tau)}{\partial z} = 0$

описывают модель одномерного пространственного сканера, коэффициент передачи по каждой пространственной моде которого определяется из

соотношения  $K_i = \frac{e^{\beta_i \cdot z} - e^{-\beta_i \cdot z}}{\beta_i \cdot (e^{\beta_i \cdot z_L} - e^{-\beta_i \cdot z_L})}$ ,  $i = \overline{1, \infty}$ , где  $\beta_i = (A \cdot \Psi_i^2 - 1)^{1/2}$ . Если

входное воздействие представлена в виде  $U(x, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{C}_i(\tau) \cdot \sin(\Psi_i \cdot x)$ , то изменяя значения  $A$  от 0 до  $\infty$ , могут быть определены пространственные частоты  $\Psi_i^2$  пространственных мод, формирующих входное воздействие  $U(x, \tau)$ .

### Использованные источники:

1. Першин И.М. Синтез систем с распределенными параметрами. - Пятигорск: Изд-во «РИО КМВ», 2002. - 212 с.
2. Першин И.М. Синтез систем с распределенными параметрами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2005. №6.
3. Першин И.М. Распределенная система передачи информации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2005. №11.
4. Першин И.М. Распределенная система передачи информации // Управление и информационные технологии. Межвузовский научный сборник. Пятигорск, «РИА-КМВ». 2007. С. 43-57.

5. Першин И.М. Система обработки распределенных сигналов // Труды VIII международной научно-технической конференции по динамике технологических систем. Том 1. Ростов-на-Дону. 2007. С. 196-202.
6. Першин И.М. Распределенные системы обработки информации. Пятигорск, «РИА-КМВ». 2008. - 148 с.